Ловейкін Ю. Оптимізація керування одномасовими механічними системами / Ловейкін Ю., Ромасевич Ю. // Вісник ТНТУ. — 2010. — Том 15. — № 4. — С.140-146. — (математичне моделювання. математика. фізика).

УДК 62-50

Ю. Ловейкін[1], канд. фіз.-мат. наук; Ю. Ромасевич[2], канд. техн. наук

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка
[2]Національний університет біоресурсів і природокористування України

ОПТИМІЗАЦІЯ КЕРУВАННЯ ОДНОМАСОВИМИ МЕХАНІЧНИМИ СИСТЕМАМИ

Резюме. *Наведено синтез оптимального керування рухом механізмів і машин, представлених одномасовими моделями. Сформульовано відповідну оптимізаційну задачу, розв'язок якої отримано за допомогою принципу максимуму Понтрягіна.*

Ключові слова: *оптимальні режими руху, принцип максимуму, механізми і машини.*

Y. Loveykin, Y. Romasevich

ONE-MASS MECHANICAL SYSTEM CONTROL OPTIMIZATION

The summary. *The broughted syntheses of optimum control motion mechanism and machines presented one-mass models. Formulated the corresponding optimization problems, which solved by using Pontryagin's maximum principle.*

Key words: *the optimum modes of the motion, principle of the maximum, mechanisms and machines.*

Постановка проблеми. Велика кількість механізмів і машин у першому наближенні моделюються за допомогою одномасової механічної системи, на яку діють зовнішнє навантаження (зусилля опору руху при виконанні технологічної операції) та зусилля, створюване приводним механізмом. Виконання тієї чи іншої технологічної операції пов'язане з витратою енергетичних ресурсів і може відбуватися по-різному, залежно від характеру прикладання приводного зусилля, тобто від керування рухом механізму. Однак існує лише єдине керування, при якому рух механізму відбувається за оптимальним, найкращим з деяких позицій, законом. Визначення оптимального керування для одномасової механічної системи є досить актуальною задачею.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Для оптимізації режимів руху механічних систем використовуються різноманітні теорії оптимального керування: варіаційне числення [1], принцип максимуму Л.С. Понтрягіна [2], динамічне програмування [3]. Використання того чи іншого методу пов'язане насамперед з характером задачі, яку розв'язують.

Більшість оптимізаційних задач можна розглядати як варіаційні. Для їх розв'язання використовують різні методи [1-3]. Однак деякі методи, наприклад, принцип максимуму Понтрягіна і динамічне програмування, дозволяють врахувати обмеження, які накладаються на керування системою, або її фазові координати. Використання класичного варіаційного числення для задач з обмеженнями пов'язане з певними труднощами, які, однак, не є принциповими. Наприклад, задача оптимізації руху матеріальної точки з обмеженнями на керування замінюється на ізопериметричну задачу з інтегральною рівністю [4]

$$\int_0^T \left[\frac{u}{u_{\max}}\right]^{2k} dt = \overline{\overline{T}}, \tag{1}$$

де T – тривалість руху системи; u – керування (як правило, – це приводне зусилля або прискорення системи); $u_{\max}$ – максимальне значення керування. Рівність (1) розглядається за умови, коли $k \to \infty$.

Найрозповсюдженішим методом розв’язування оптимізаційних задач є принцип максимуму Понтрягіна, який тісно пов’язаний з динамічним програмуванням та варіаційним численням [5]. Тому у подальших дослідженнях будемо використовувати саме його.

Метою наведеного дослідження є синтез оптимального керування рухом одномасової динамічної системи. Критерієм оптимальності руху будемо вважати інтегральний функціонал з підінтегральним виразом – квадратом керування

$$J = \int_0^T u^2 dt \to \min, \tag{2}$$

де $u = \ddot{x}$ (крапка над символом означає диференціювання за часом); J – інтегральний функціонал.

Мінімізація такого функціонала дасть змогу зменшити електричні втрати в обмотках приводного двигуна, зменшить нагрів двигуна та покращить динаміку руху системи.

Для досягнення поставленої мети слід розв’язати такі задачі: 1) визначити за допомогою принципу максимуму оптимальне керування одномасовою динамічною системою; 2) дослідити отриманий розв’язок задачі – довести, що отримана функція керування доставляє оптимізаційному критерію мінімум.

Виклад матеріалу. Постановка задачі оптимального керування буде не повною, якщо не задати крайових умов руху системи

$$\begin{cases} x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0; \\ \dot{x}(T) = v_1, \ \ddot{x}(T) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

тобто оптимізувати розгін системи.

Розглянемо цю задачу з точки зору оптимального керування. Введемо додаткові фазові змінні

$$\begin{cases} y = \dot{x}, \\ z = z(t) = \int_0^t \ddot{x}^2 ds = \int_0^t u^2 ds. \end{cases} \tag{4}$$

Позначимо вектор фазових змінних $w = w(x, y, z)$. Тоді задачу оптимального керування перепишемо у вигляді

$$\begin{cases} J(w, u) = z(T) \to \inf, \\ \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = u^2, \end{cases} \\ x(0) = y(0) = z(0) = 0, \ y(T) = v_1, \\ u(0) = u(T) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Позначимо через $U = \{u(t) : u(0) = u(T) = 0\}$ множину допустимих керувань. Застосуємо до отриманої задачі принцип максимуму Понтрягіна. Для цього шукаємо розв’язок спряженої системи

$$\psi(t) = (\psi_1(t),\ \psi_2(t),\ \psi_3(t)); \tag{6}$$

$$\dot{\psi}(t) = -(\frac{\partial f}{\partial w})^T \psi, \tag{7}$$

де $f(w) = \begin{pmatrix} y \\ u \\ u^2 \end{pmatrix}$, $\frac{\partial f}{\partial w} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Звідси отримаємо

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0; \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1; \\ \dot{\psi}_3 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Інтегрування системи диференціальних рівнянь (8) дає

$$\begin{cases} \psi_1(t) = C_1; \\ \psi_2 = C_2 - C_1 t; \\ \psi_3 = C_3. \end{cases} \tag{9}$$

Запишемо умови трансверсальності для цієї задачі

$$\begin{cases} \psi(0) = \alpha'_{w(0)}; \\ \psi(T) = \alpha'_{w(T)}, \end{cases} \tag{10}$$

де $\alpha = \lambda_0 z(T) + \lambda_1 x(0) + \lambda_2 y(0) + \lambda_3 z(0) + \lambda_4 y(T),\ \lambda_0 \geq 0,\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in R.$

Знайдемо, чому дорівнюють спряжені функції на початку та у кінці руху системи

$$\begin{cases} \psi_1(0) = C_1 = \alpha'_{x(0)} = \lambda_1; \\ \psi_2(0) = C_2 = \alpha'_{y(0)} = \lambda_2; \\ \psi_1(0) = C_3 = \alpha'_{z(0)} = \lambda_3; \\ \psi_1(T) = C_1 = -\alpha'_{x(T)} = 0; \\ \psi_2(T) = C_2 - C_1 T = -\alpha'_{y(T)} = -\lambda_4; \\ \psi_3(T) = C_3 = -\alpha'_{z(T)} = -\lambda_0. \end{cases} \tag{11}$$

Таким чином, маємо співвідношення між множниками Лагранжа $\lambda_0, ..., \lambda_4$ і константами C_1, C_2, C_3: $C_1 = \lambda$, $C_2 = \lambda_2 = -\lambda_4$, $C_3 = \lambda_3 = -\lambda_0$.

Умовою екстремуму функціонала є максимум функції Гамільтона

$$H(t, \psi(t),\ w(t),\ u(t)) = \max_{u \in U} H(t, \psi(t),\ w(t),\ u(t)), \tag{12}$$

де $H(\psi(t),\ f(w, u)) = \sum_{i=1}^{3} \psi_i(t) f_i(w, u)$.

Запишемо, чому дорівнює функція Гамільтона (12)

$$\max_{u \in U} H = \max_{u \in U} (\lambda_2 u - \lambda_0 u^2). \tag{13}$$

Якщо $\lambda_0 = 0$, то максимум існує лише у випадку, коли $\lambda_2 = 0$. Але тоді всі множники Лагранжа дорівнюють нулю $(\lambda_j = 0,\ j = \overline{0, 4})$, що неможливо. Тоді $\lambda_0 \neq 0$. Запишемо, наприклад, $\lambda_0 = 1$. Тоді максимум досягається у точці $u = \frac{\lambda_2}{2}$.

Зважаючи на множину допустимих керувань $U = \{u(t) : u(0) = u(T) = 0\}$, маємо, що $\lambda_2 = 0$ і тоді $u(t) = 0$.

У результаті отримаємо: $\lambda_0 = 1,\ \lambda_3 = -1,\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0$ і $u \equiv 0$ на $[0, T]$. Далі шукаємо функції $x(t),\ y(t),\ z(t):\ \ \dot{x} = y,\ \dot{y}(0) = 0,\ \dot{z}(0) = 0;\ \ z(t) = A_1,\ \ y(t) = A_2$, $x(t) = A_3 t + A_2$.

Але функції $x(t),\ y(t),\ z(t)$ не задовольняють обмеження задачі $y(0) = 0\ \Rightarrow A_2 = 0,\ \Rightarrow y(T) = 0 \neq v_1$. Отже, задача розв'язку не має.

Розглянемо функціонал (2) на більшій множині допустимих елементів $C_0 = \{x : x(0) = \dot{x}(0) = 0,\ x(T) = v_1\}$, тобто розглянемо задачу

$$\begin{cases} J(x) = \int\limits_0^T \ddot{x}^2 dt \to \inf, \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0,\ \dot{x}(T) = v_1 \end{cases} \tag{14}$$

і розв'яжемо її.

Введемо додаткові фазові змінні

$$\begin{cases} y = \dot{x}, \\ z = z(t) = \int\limits_0^t \ddot{x}^2 ds = \int\limits_0^t u^2 ds \end{cases} \tag{15}$$

та керування $u = \ddot{x} = \dot{y}$. Матимемо задачу

$$\begin{cases} J(x,\ y,\ z, u) = \int\limits_0^T u^2 dt \to \inf, \\ \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = u^2, \end{cases} \\ x(0) = y(0) = z(0) = 0, \\ y(T) = v_1. \end{cases} \tag{16}$$

Умови трансверсальності та розв'язок системи диференціальних рівнянь для спряжених функцій для даної задачі буде мати вигляд (6-11).

Функція Гамільтона для даної задачі має такий вигляд:

$$H = C_1 y + (C_2 - C_1 t)u + C_3 u^2 = C_2 u + C_3 u^2, \tag{17}$$

бо $C_1 = 0$. Знайдемо максимум функції Гамільтона $\max\limits_{u \in U} H = \max\limits_{u \in U}[C_2 u - C_3 u^2]$. Оскільки $C_3 = -\lambda_0 \leq 0$, то максимум $\max\limits_{u \in U} H$ досягається у вершині параболи $u = \frac{-C_2}{2C_3}$ при

$\lambda_0 > 0$. Якщо $\lambda_0 = 0$, то максимум існує лише у випадку $C_2 = 0$, але тоді всі множники Лагранжа перетворюються в нуль.

Отже, $\lambda_0 > 0$. Наприклад, запишемо $\lambda_0 = \frac{1}{2}$. Тоді $u = -C_2$.

Підставляємо керування $u = -C_2$ у систему диференціальних рівнянь і шукаємо відповідну траєкторію при такому значенні керування:

$$\begin{cases} \dot x = y, \quad x(t) = A_3 + A_2 t - \dfrac{C_2 t^2}{2}, \quad A_1 = A_2 = A_3 = 0 \text{ з обмежень задачі} \\ \dot y = u, \quad y(t) = A_2 - C_2 t, \quad y(T) = -C_2 T = v_1; \quad C_2 = \dfrac{-v_1}{T}; \\ \dot z = C_2^2 \quad z(t) = C_2 t^2 + A_1. \end{cases} \tag{18}$$

У результаті маємо $\bar u = \frac{v_1}{T}$, $\bar x = \frac{v_1 t^2}{T}$, $t \in [0, T]$.

Перевіримо, чи відповідатиме знайдена функція $\bar x(t)$ мінімуму функціонала $J(x)$, для чого знайдемо варіацію функціонала

$$J(\bar x + h) - J(\bar x) = \left| h(0) = \dot h(0) = \dot h(T) = 0 \right| = \int_0^T (2\ddot h \ddot{\bar x} + \ddot h^2) dt =$$

$$= 2\frac{v_1}{T}\int_0^T \ddot h dt + \int_0^T \ddot h^2 dt = 2\frac{v_1}{T}\dot h \Big|_0^T + \int_0^T \ddot h^2 dt \ge 0. \tag{19}$$

Повернемося до вихідної задачі (2-3). Якщо в задачі (2-3) ввести керування і застосувати до отриманої задачі оптимального керування принцип максимуму Понтрягіна, то побачимо, що задача розв'язку не має.

Позначимо множину допустимих елементів задачі (2-3) через $C = \{x:\ x(0) = \dot x(0) = 0,\ \dot x(T) = v_1,\ \ddot x(0) = \ddot x(T) = 0\}$.

Очевидно, що насправді $C \subset C_0$, тоді $\inf\limits_{C} J(x) \ge \inf\limits_{C_0} J(x)$.

Візьмемо послідовність функцій x_n, $n \ge 1$, тому що $\ddot x_n(t)$ мають вигляд, зображений на рисунку 1.

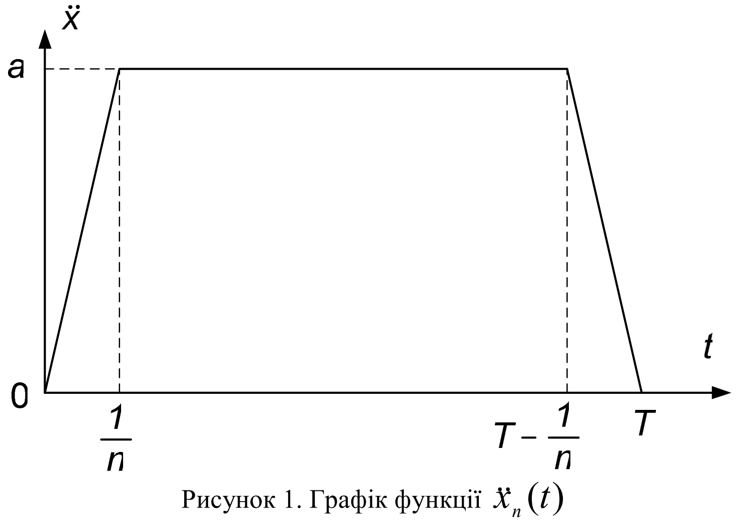

Рисунок 1. Графік функції $\ddot x_n(t)$

Візьмемо функції $x_n(t)$, двічі проінтегрувавши $\dddot{x}_n(t)$ так, щоб $x_n(t) \in C \quad \forall\ n \ge 1$.

Потім покажемо, що $J(x_n(t)) \ge \inf\limits_{C_0} J(x),\ n \to \infty$.

Функція $\dddot{x}_n(t)$ набуде вигляду

$$\ddot{x}_n(t) = \begin{cases} nat, \ \ t \in [0,\ \frac{1}{n}); \\ a, \ \ t \in (\frac{1}{n},\ T - \frac{1}{n}]; \\ na(T-t), \ \ t \in [T - \frac{1}{n},\ T]. \end{cases} \tag{20}$$

Оскільки $\ddot{x}(0) = \ddot{x}(T) = 0,\ \dot{x}(0) = 0,\ \dot{x}(T) = v_1$, то систему рівнянь (20) можна записати у вигляді

$$\ddot{x}_n(t) = \begin{cases} \frac{nat^2}{2}, \ \ t \in [0,\ \frac{1}{n}); \\ at + A_1, \ \ t \in (\frac{1}{n},\ T - \frac{1}{n}]; \\ \frac{-na(T-t)^2}{2} + A_2, \ \ t \in [T - \frac{1}{n},\ T]. \end{cases} \tag{21}$$

Знайдемо значення констант A_1 і A_2. Запишемо

$$\dot{x}_n(\frac{1}{n} - 0) = \dot{x}_n(\frac{1}{n}), \quad \dot{x}_n(T - \frac{1}{n} - 0) = \dot{x}_n(T - \frac{1}{n}), \quad \dot{x}_n(T) = v_1. \tag{22}$$

Звідси $A_2 = v_1$. Також запишемо

$$\frac{a}{2n} = \frac{a}{n} + A_1, \ \ a(T - \frac{1}{n} + A_1) = A_2 - \frac{a}{2n}. \tag{23}$$

Отже, $A_1 = \dfrac{v_1}{2(1 - nT)}$. При таких значеннях констант знайдемо вищі похідні функції $x_n(t) \in C,\ \ n \ge 1$:

$$\ddot{x}_n(t) = \begin{cases} \frac{nv_1}{T - \frac{1}{n}} t, \ \ t \in [0,\ \frac{1}{n}); \\ \frac{v_1}{T - \frac{1}{n}}, \ \ t \in (\frac{1}{n},\ T - \frac{1}{n}]; \\ \frac{nv_1}{2(T - \frac{1}{n})}(T - t), \ \ t \in [T - \frac{1}{n},\ T]. \end{cases} \tag{24}$$

$$\dot{x}_n(t) = \begin{cases} \frac{nv_1}{2(T - \frac{1}{n})} t^2, \ \ t \in [0,\ \frac{1}{n}); \\ \frac{v_1}{2(T - \frac{1}{n})}(t - \frac{1}{2n}), \ \ t \in (\frac{1}{n},\ T - \frac{1}{n}]; \\ v_1 - \frac{nv_1}{2(T - \frac{1}{n})}(T - t)^2, \ \ t \in [T - \frac{1}{n},\ T]. \end{cases} \tag{25}$$

Тепер покажемо, що $J(x_n(t)) \geq \inf_{C_0} J(x)$:

$$J(x_n(t)) = \int_0^T \ddot{x}_n(t)dt = \frac{2v_1^2}{3n(T-\frac{1}{n})^2} + v_1 \frac{T-\frac{2}{n}}{(T-\frac{2}{n})}. \tag{26}$$

При умові $n \to \infty$ маємо

$$J(x_n(t)) = \frac{v_1^2}{T} = \inf_{C_0} J(x). \tag{27}$$

Отже, $\inf_{C} J(x) = \inf_{C_0} J(x)$.

Висновок. Підсумовуючи результати наведених досліджень, можна зробити висновок, що задача оптимального керування формулюється як варіаційна. Розв'язок такої задачі можна отримати за допомогою принципу максимуму Понтрягіна. Керування, яке доставляє мінімум оптимізаційному критерію (2) являє собою пряму лінію, паралельну осі абсцис. Крім того, оптимальне керування на початку руху системи та у кінці має розриви другого роду, які не дозволяють реалізувати таке керування на практиці. Можна лише певним чином наблизитися до практичної реалізації, якщо n – достатньо велике число. Однак при цьому оптимізаційний критерій не буде досягати мінімуму.

Література

1. Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимального управления / Ю.П. Петров. – Л.: Энергия, 1977. – 280 с.
2. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальних процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтнянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко – М.: Физматгиз, 1961. – 392 с.
3. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман: под. ред. Воробьева Н.Н. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 400 с.
4. Красовский И.И. Теория управления движением (линейные системы) / И.И. Красовский. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
5. Афанасьев В.Н. Математическая теория конструирования систем управления / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. – М.: Высшая школа, 2003. – 614 с.

Отримано 15.11.2010